

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名 _____ 分数 _____

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

- (1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是
 (A) (1,0). (B) (2,0). (C) (3,0). (D) (4,0).
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为
 (A) $(-1, 1]$. (B) $[-1, 1)$. (C) $[0, 2)$. (D) $(0, 2]$.
- (3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是
 (A) $f(0) > 1, f''(0) > 0$. (B) $f(0) > 1, f''(0) < 0$.
 (C) $f(0) < 1, f''(0) > 0$. (D) $f(0) < 1, f''(0) < 0$.
- (4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$, 则 I, J, K 的大小关系为
 (A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$.
 (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.
- (5) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $P_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
, 则 $A =$
 (A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$.
 (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$.
- (6) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为
 (A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 . (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
- (7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是
 (A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)F_1(x)$.
 (C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 EX 与 EY 存在, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) =$
 (A) $EU \cdot EV$. (B) $EX \cdot EY$.
 (C) $EU \cdot EY$. (D) $EX \cdot EV$.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

- (9) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.
- (10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.
- (11) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=0, y=2} =$ _____.
- (12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + xy dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____.
- (13) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____.
- (14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

- (15) (本题满分 10 分)
 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e-1}}$.
- (16) (本题满分 9 分)
 设函数 $z = f[xy, yg(x)]$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1) = 1$.
 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{y=1}$.
- (17) (本题满分 10 分)
 求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.
- (18) (本题满分 10 分)
 (I) 证明对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立;
 (II) 设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n=1, 2, \dots),$$
 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.
- (19) (本题满分 11 分)
 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且
 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$,
 其中
 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,
 计算二重积分

$$I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy.$$
- (20) (本题满分 11 分)
 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.
 (I) 求 a 的值;

答案速查

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.
 (21) (本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;
 (II) 求矩阵 A .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;
 (II) 求 $Z=XY$ 的概率分布;
 (III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23) (本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知, \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;
 (II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

一、选择题

(1)(C). (2)(C). (3)(A). (4)(B). (5)(D). (6)(D). (7)(D). (8)(B).

二、填空题

(9) $\ln(1+\sqrt{2})$. (10) $e^{-x} \sin x$. (11) 4. (12) π . (13) 1. (14) $\mu(\sigma^2 + \mu^2)$.

三、解答题

(15) $e^{-\frac{1}{2}}$. (16) $f'_1(1,1) + f''_{11}(1,1) + f''_{12}(1,1)$.

(17) 当 $k \leq 1$ 时, 方程只有一个实根; 当 $k > 1$ 时, 方程有且仅有 3 个不同的实根.

(18) 证明略. (19) a .

(20) (I) $a=5$. (II) $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$; $\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$; $\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(21) (I) -1 是 A 的一个特征值, 其对应的全部特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, k_1 为任意非零常数; 1 是 A 的一个特征

值, 其对应的全部特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, k_2 为任意非零常数; 0 也是 A 的一个特征值, 其对应的全部特征向量为

$k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, k_3 为任意非零常数. (II) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(22) (I)

Y	-1	0	1
X	0	$\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(II)

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(III) $\rho_{XY}=0$.

(23) (I) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$. (II) $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$, $D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名 _____ 分数 _____

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设函数

$$f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n),$$

其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^n n!$.

(3) 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在.

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^x \sin x dx (k=1, 2, 3)$, 则有

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$.
(C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的为

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} =$

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$.

(8) 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ _____.

(10) $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx =$ _____.

(11) $\text{grad} \left(xy + \frac{z}{y} \right) \Big|_{(2, 1, 1)} =$ _____.

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ _____.

(13) 设 α 为 3 维单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 _____.

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C}) =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t \end{cases} (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$. 若曲线

L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段, 计算

曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|A|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

答案速查

(21)(本题满分 11 分)

已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$ 的秩为 2.

- (I) 求实数 a 的值;
 (II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

- (I) 求 $P\{X=2Y\}$;
 (II) 求 $\text{Cov}(X-Y, Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

- (I) 求 Z 的概率密度 $f(z; \sigma^2)$;
 (II) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;
 (III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(D). (5)(C). (6)(B). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9) e^x . (10) $\frac{\pi}{2}$. (11) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. (12) $\frac{\sqrt{3}}{12}$. (13) 2. (14) $\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15) 证明略.

(16) $f(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 为 $f(x, y)$ 的极大值; $f(-1, 0) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ 为 $f(x, y)$ 的极小值.

(17) 收敛域为 $(-1, 1)$; 和函数 $S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & 0 < |x| < 1, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$

(18) $f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t$; 所求区域的面积为 $\frac{\pi}{4}$.

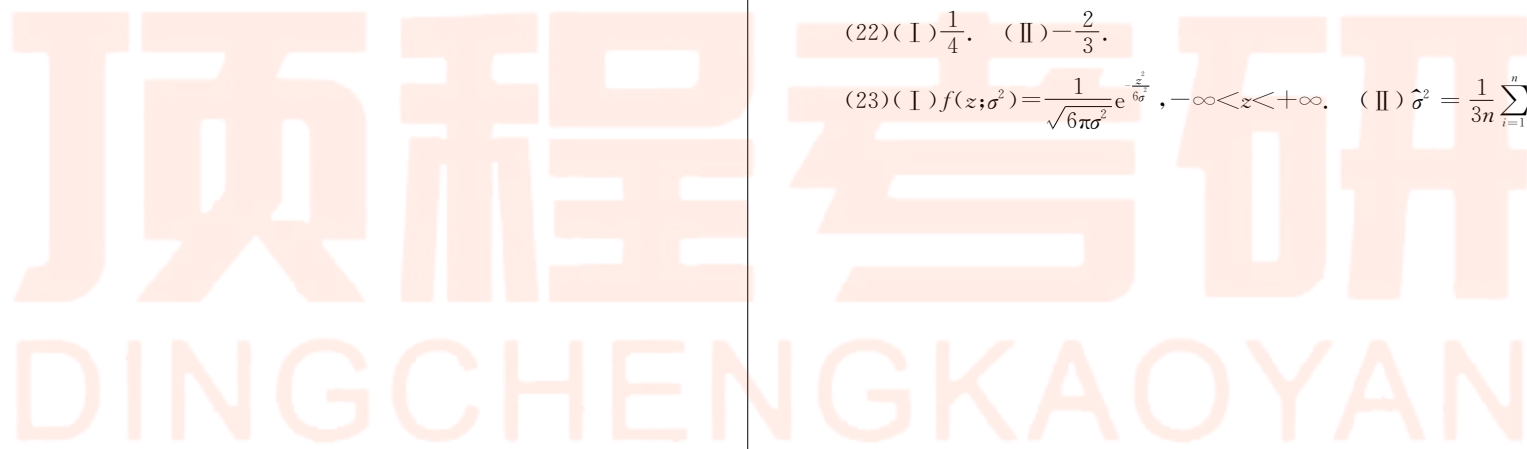
(19) $\frac{\pi}{2} - 4$.

(20) (I) $1 - a^4$. (II) 当 $a = -1$ 时有无穷多解, 其通解为 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(21) (I) $a = -1$. (II) 正交变换为 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mathbf{y}$.

(22) (I) $\frac{1}{4}$. (II) $-\frac{2}{3}$.

(23) (I) $f(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty < z < +\infty$. (II) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$. (III) 证明略.



2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名 _____ 分数 _____

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则

- (A) $k=2, c=-\frac{1}{2}$. (B) $k=2, c=\frac{1}{2}$.
 (C) $k=3, c=-\frac{1}{3}$. (D) $k=3, c=\frac{1}{3}$.

(2) 曲面 $x^2 + \cos xy + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为

- (A) $x - y + z = -2$. (B) $x + y + z = 0$.
 (C) $x - 2y + z = -3$. (D) $x - y - z = 0$.

(3) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, \dots)$. 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $S\left(-\frac{9}{4}\right) =$

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $-\frac{1}{4}$. (D) $-\frac{3}{4}$.

(4) 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向的平面曲线. 记

$$I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i=1, 2, 3, 4),$$

则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

- (A) I_1 . (B) I_2 . (C) I_3 . (D) I_4 .

(5) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB=C$, 且 B 可逆, 则

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.
 (B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.
 (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.
 (D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

- (A) $a=0, b=2$. (B) $a=0, b$ 为任意常数.
 (C) $a=2, b=0$. (D) $a=2, b$ 为任意常数.

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且

$$X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2),$$

$$p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i=1, 2, 3),$$

则

- (A) $p_1 > p_2 > p_3$. (B) $p_2 > p_1 > p_3$. (C) $p_3 > p_1 > p_2$. (D) $p_1 > p_3 > p_2$.

(8) 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$

- (A) α . (B) $1 - \alpha$. (C) 2α . (D) $1 - 2\alpha$.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$ _____.

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解为 $y =$ _____.

(11) 设 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$ _____.

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j=1, 2, 3)$, 则 $|A| =$ _____.

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件:

$$a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2),$$

$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明 $S'(x) - S(x) = 0$;

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right) e^{+y}$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

(19) (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω .

(I) 求曲面 Σ 的方程;

(II) 求 Ω 的形心坐标.

答案速查

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{令随机变量 } Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$$

(I) 求 Y 的分布函数;

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

一、选择题

(1)(D). (2)(A). (3)(C). (4)(D). (5)(B). (6)(B). (7)(A). (8)(C).

二、填空题

(9)1. (10) $C_1 e^x + C_2 e^{3x} - x e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. (11) $\sqrt{2}$. (12) $\ln 2$. (13)-1. (14) $1 - \frac{1}{e}$.

三、解答题

(15) $8 - 2\pi - 4\ln 2$. (16)(I)证明略. (II) $S(x) = 2e^x + e^{-x}$.

(17)极小值为 $f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = -e^{-\frac{1}{3}}$. (18)证明略.

(19)(I) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2z = 1$. (II) $\left(0, 0, \frac{7}{5}\right)$.

(20)当且仅当 $a = -1$ 且 $b = 0$ 时, 存在满足条件的矩阵 C , 且 $C = \begin{pmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

(21)证明略.

(22)(I) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \frac{y^3 + 18}{27}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$ (II) $\frac{8}{27}$.

(23)(I) θ 的矩估计量为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. (II) θ 的最大似然估计量为 $\frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$.

顶程考研
 DINGCHENGKAOYAN

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名_____ 分数_____

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

- (1) 下列曲线中有渐近线的是
 (A) $y=x+\sin x$. (B) $y=x^2+\sin x$.
 (C) $y=x+\sin \frac{1}{x}$. (D) $y=x^2+\sin \frac{1}{x}$.
- (2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上
 (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.
 (C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.
- (3) 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx =$
 (A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$.
 (B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y) dy$.
 (C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$.
 (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.
- (4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a,b \in \mathbf{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$, 则 $a_1 \cos x + b_1 \sin x =$
 (A) $2 \sin x$. (B) $2 \cos x$.
 (C) $2\pi \sin x$. (D) $2\pi \cos x$.
- (5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$
 (A) $(ad-bc)^2$. (B) $-(ad-bc)^2$. (C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$. (D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.
- (6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的
 (A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.
 (C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.
- (7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$, 则 $P(B-A)=$
 (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

- (8) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, 则
 (A) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$. (B) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$.
 (C) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$. (D) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

- (9) 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为_____.
- (10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x)=2(x-1), x \in [0,2]$, 则 $f(7)=$ _____.
- (11) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ _____.
- (12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z dx + y dz =$ _____.
- (13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.
- (14) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本. 若 $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计, 则 $c =$ _____.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程

$$y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$$

确定, 求 $f(x)$ 的极值.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z=f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(18) (本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

答案速查

- (I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- (II) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.
- (20) (本题满分 11 分)
- 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

- (I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;
- (II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

(21) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$.

- (I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;
- (II) 求 EY .

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数且大于零. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

- (I) 求 EX 与 $E(X^2)$;
- (II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;
- (III) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\epsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \epsilon\} = 0$?

一、选择题

(1)(C). (2)(D). (3)(D). (4)(A). (5)(B). (6)(A). (7)(B). (8)(D).

二、填空题

(9) $2x - y - z - 1 = 0$. (10) 1. (11) xe^{2x+1} . (12) π . (13) $[-2, 2]$. (14) $\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15) $\frac{1}{2}$. (16) 极小值为 $f(1) = -2$. (17) $f(u) = \frac{1}{16}(e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$. (18) -4π . (19) 证明略.

(20) (I) 方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系为 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(II) $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\alpha, k_2\alpha, k_3\alpha)$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

(21) 证明略.

(22) (I) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3y}{4}, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$ (II) $\frac{3}{4}$.

(23) (I) $EX = \frac{\sqrt{\pi}\theta}{2}$; $E(X^2) = \theta$. (II) $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$. (III) 存在, $a = \theta$. 理由略.