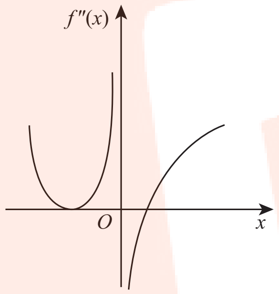
2015 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其二阶导函数 $f''(x)$的图形如右图所示，则曲线 $y=f(x)$的拐点个数为



(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解，则

(A)$a=-3,b=2,c=-1$. (B)$a=3,b=2,c=-1$.

(C)$a=-3,b=2,c=1$. (D)$a=3,b=2,c=1$.

(3)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的

(A)收敛点，收敛点. (B)收敛点，发散点.

(C)发散点，收敛点. (D)发散点，发散点.

(4)设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$. (B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$. (D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$. (B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$. (D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. (B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. (D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7)若 A,B 为任意两个随机事件，则

(A)$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$. (B)$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C)$P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$. (D)$P(AB)\geqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8)设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$

(A)-3. (B)3. (C)-5. (D)5.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

(10)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$________.

(11)若函数 $z=z(x,y)$由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$________.

(12)设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

(13)n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$________.

(14)设二维随机变量(X,Y)服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$与 $g(x)$在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$在曲线 C 上的最大方向导数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x),v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(Ⅱ)设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2},\\z=x,\end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分

$$I=\int_L(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z.$$

2015 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(Ⅱ)当 k 为何值时,存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同,并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布;

(Ⅱ)求 EY.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(B). (5)(D). (6)(A). (7)(C). (8)(D).

二、填空题

(9)$-\dfrac{1}{2}$. (10)$\dfrac{\pi^2}{4}$. (11)$-\mathrm{d}x$. (12)$\dfrac{1}{4}$. (13)$2^{n+1}-2$. (14)$\dfrac{1}{2}$.

三、解答题

(15)$a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}$. (16)$f(x)=\dfrac{8}{4-x},x\in I$. (17)3.

(18)(Ⅰ)证明略.

(Ⅱ)$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

(19)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$. (20)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)当 $k=0$ 时,$\boldsymbol{\xi}=c(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)$,$c$ 为任意非零常数.

(21)(Ⅰ)$a=4,b=5$. (Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)$P\{Y=k\}=(k-1)\left(\dfrac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\dfrac{1}{8}\right)^2,k=2,3,\cdots$. (Ⅱ)16.

(23)(Ⅰ)θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$. (Ⅱ)$\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

2016 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________　分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛,则

(A)$a<1$ 且 $b>1$.　(B)$a>1$ 且 $b>1$.

(C)$a<1$ 且 $a+b>1$.　(D)$a>1$ 且 $a+b>1$.

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$的一个原函数是

(A)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$　(B)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$　(D)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(3)若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$,$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$的两个解,则 $q(x)=$

(A)$3x(1+x^2)$.　(B)$-3x(1+x^2)$.　(C)$\frac{x}{1+x^2}$.　(D)$-\frac{x}{1+x^2}$.

(4)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则

(A)$x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点.　(B)$x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点.

(C)$f(x)$在 $x=0$ 处连续但不可导.　(D)$f(x)$在 $x=0$ 处可导.

(5)设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为

(A)单叶双曲面.　(B)双叶双曲面.

(C)椭球面.　(D)柱面.

(7)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,记 $p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}$,则

(A)p 随着 μ 的增加而增加.　(B)p 随着 σ 的增加而增加.

(C)p 随着 μ 的增加而减少.　(D)p 随着 σ 的增加而减少.

(8)随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3,且三种结果发生的概率均为$\frac{1}{3}$.将试验 E 独立重复做 2 次,X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数,Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数,则 X 与 Y 的相关系数为

(A)$-\frac{1}{2}$.　(B)$-\frac{1}{3}$.　(C)$\frac{1}{3}$.　(D)$\frac{1}{2}$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$________.

(10)向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$________.

(11)设函数 $f(u,v)$可微,$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$________.

(12)设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$,且 $f'''(0)=1$,则 $a=$________.

(13)行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________.

(14)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本,样本均值$\overline{x}=9.5$,参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8,则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________.

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,计算二重积分$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$满足方程 $y''+2y'+ky=0$,其中 $0<k<1$.

(Ⅰ)证明反常积分$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(Ⅱ)若 $y(0)=1$,$y'(0)=1$,求$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$满足$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$,且 $f(0,y)=y+1$,L_t 是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$,并求 $I(t)$的最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成,Σ 为 Ω 整个表面的外侧,计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(Ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}.$$

当 a 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$；

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\0, & X>Y.\end{cases}$$

(Ⅰ)写出 (X,Y) 的概率密度；

(Ⅱ)问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数. X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令

$$T=\max\{X_1,X_2,X_3\}.$$

(Ⅰ)求 T 的概率密度；

(Ⅱ)确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.

答案速查

一、选择题

(1)(C).　(2)(D).　(3)(A).　(4)(D).　(5)(C).　(6)(B).　(7)(B).　(8)(A).

二、填空题

(9) $\frac{1}{2}$.　(10) $\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$.　(11) $-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.　(12) $\frac{1}{2}$.　(13) $4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$.　(14) $(8.2,10.8)$.

三、解答题

(15) $\frac{32}{3}+5\pi$.　(16)(Ⅰ)证明略.　(Ⅱ) $\frac{3}{k}$.　(17) $I(t)=\mathrm{e}^{2-t}+t$；$I(2)=3$ 是 $I(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值.

(18) $\frac{1}{2}$.　(19)证明略.　(20)当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$；当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\k_1&k_2\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意常数；当 $a=-2$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解.

(21)(Ⅰ) $\boldsymbol{A}^{99}=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$.　(Ⅱ) $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$

(22)(Ⅰ) $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$　(Ⅱ) U 与 X 不相互独立；理由略.

(Ⅲ) $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\\frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\1, & z\geqslant2.\end{cases}$

(23)(Ⅰ) $f_T(z)=\begin{cases}\dfrac{9z^8}{\theta^9}, & 0<z<\theta,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$　(Ⅱ) $a=\frac{10}{9}$ 时，aT 为 θ 的无偏估计.

2016 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

2017 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A)$ab=\dfrac{1}{2}$. (B)$ab=-\dfrac{1}{2}$.

(C)$ab=0$. (D)$ab=2$.

(2)设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则

(A)$f(1)>f(-1)$. (B)$f(1)<f(-1)$.

(C)$|f(1)|>|f(-1)|$. (D)$|f(1)|<|f(-1)|$.

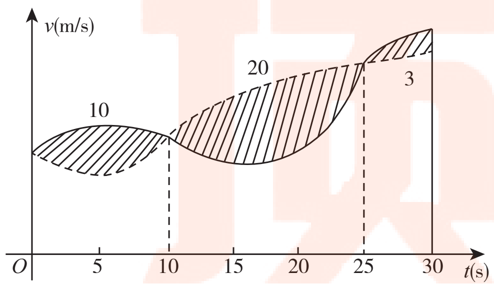
(3)函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点$(1,2,0)$处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$的方向导数为

(A)12. (B)6. (C)4. (D)2.

(4)甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处. 图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位：m/s)，虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10，20，3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位：s)，则

(A)$t_0=10$. (B)$15<t_0<20$.

(C)$t_0=25$. (D)$t_0>25$.



(5)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆. (B)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C)$\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆. (D)$\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(6)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则

(A)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. (B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. (D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7)设 A,B 为随机事件. 若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$的充分必要条件是

(A)$P(B|A)>P(B|\overline{A})$. (B)$P(B|A)<P(B|\overline{A})$.

(C)$P(\overline{B}|A)>P(B|\overline{A})$. (D)$P(\overline{B}|A)<P(B|\overline{A})$.

(8)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$为来自总体 $N(\mu,1)$的简单随机样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是

(A)$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布. (B)$2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C)$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布. (D)$n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________.

(10)微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________.

(11)若曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$内与路径无关，则 $a=$________.

(12)幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间$(-1,1)$内的和函数 $S(x)=$________.

(13)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为________.

(14)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$为标准正态分布函数，则 EX =________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

(16)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明：

(Ⅰ)方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Ⅱ)方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

(19)(本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C.

(Ⅰ)求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

(Ⅱ)求 S 的质量 M.

(20)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $r(\boldsymbol{A})=2$；

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{Y\leqslant EY\}$；

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|\,(i=1,2,\cdots,n)$. 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(Ⅰ)求 Z_1 的概率密度；

(Ⅱ)利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(Ⅲ)求 σ 的最大似然估计量.

答案速查

一、选择题

(1)(A). (2)(C). (3)(D). (4)(C). (5)(A). (6)(B). (7)(A). (8)(B).

二、填空题

(9)0. (10)$e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数. (11)-1. (12)$\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

(13)2. (14)2.

三、解答题

(15)$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial u}$；$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial u}+\dfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial u^2}-\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial v}$. (16)$\dfrac{1}{4}$.

(17)$y(-1)=0$ 是 $y(x)$ 的极小值；$y(1)=1$ 是 $y(x)$ 的极大值. (18)证明略.

(19)(Ⅰ)所求方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ z=0.\end{cases}$ (Ⅱ)$M=64$.

(20)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

(21)$a=2$；$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$. (22)(Ⅰ)$\dfrac{4}{9}$. (Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ z-2, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$ (Ⅱ)矩估计量 $\hat\sigma=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$. (Ⅲ)最大似然估计量 $\hat\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2}$.

2018 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________　分数________

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

(A)$f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B)$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C)$f(x)=\cos|x|$.　　(D)$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2)过点(1,0,0),(0,1,0),且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为

(A)$z=0$ 与 $x+y-z=1$.　　(B)$z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

(C)$x=y$ 与 $x+y-z=1$.　　(D)$x=y$ 与 $2x+2y-z=2$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$

(A)$\sin 1+\cos 1$.　　(B)$2\sin 1+\cos 1$.

(C)$2\sin 1+2\cos 1$.　　(D)$2\sin 1+3\cos 1$.

(4)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$,$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,则

(A)$M>N>K$.　　(B)$M>K>N$.

(C)$K>M>N$.　　(D)$K>N>M$.

(5)下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则

(A)$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.　　(B)$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C)$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.　　(D)$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7)设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$,且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$,则 $P\{X<0\}=$

(A)0.2.　　(B)0.3.　　(C)0.4.　　(D)0.5.

(8)设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,据此样本检验假设:$H_0:\mu=\mu_0$,$H_1:\mu\neq\mu_0$,则

(A)如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0,那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(B)如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0,那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

(C)如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0,那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(D)如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0,那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$,则 $k=$________.

(10)设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数. 若曲线 $y=f(x)$ 过点(0,0)且与曲线 $y=2^x$ 在点(1,2)处相切,则 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$________.

(11)设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$,则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=$________.

(12)设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,则 $\oint_L xy\mathrm{d}s=$________.

(13)设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量,且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

(14)设随机事件 A 与 B 相互独立,A 与 C 相互独立,$BC=\varnothing$. 若 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$,$P(AC|AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$,则 $P(C)=$________.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 10 分)

将长为 2 m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在,求出最小值.

(17)(本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧,计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(18)(本题满分 10 分)

已知微分方程 $y'+y=f(x)$,其中 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

(Ⅰ)若 $f(x)=x$,求方程的通解;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,证明:方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19)(本题满分 10 分)

设数列$\{x_n\}$满足:$x_1>0$,$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(20)(本题满分 11 分)

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中$a$是参数.

(Ⅰ)求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解;

(Ⅱ)求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

(21)(本题满分 11 分)

已知a是常数,且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求a;

(Ⅱ)求满足$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量X与Y相互独立,X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$服从参数为$\lambda$的泊松分布. 令$Z=XY$.

(Ⅰ)求$\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(Ⅱ)求Z的概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本. 记σ的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$.

(Ⅰ)求$\hat{\sigma}$;

(Ⅱ)求$E\hat{\sigma}$和$D\hat{\sigma}$.

答案速查

一、选择题

(1)(D). (2)(B). (3)(B). (4)(C). (5)(A). (6)(A). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9)-2. (10)$2(\ln 2-1)$. (11)$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$. (12)$-\dfrac{\pi}{3}$. (13)$-1$. (14)$\dfrac{1}{4}$.

三、解答题

(15)$\dfrac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\dfrac{1}{6}(e^x+2)\sqrt{e^x-1}+C$,其中$C$为任意常数. (16)$\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\ \mathrm{m}^2$.

(17)$\dfrac{14\pi}{45}$. (18)(Ⅰ)$y=C_1e^{-x}+x-1$(C_1为任意常数). (Ⅱ)证明略.

(19)证明略;$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(20)(Ⅰ)当$a\neq2$时,$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;当$a=2$时,$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解为$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$,$k$为任意常数.

(Ⅱ)当$a\neq2$时,$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为$y_1^2+y_2^2+y_3^2$;当$a=2$时,$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为$y_1^2+y_2^2$.

(21)(Ⅰ)2. (Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数,$k_2\neq k_3$.

(22)(Ⅰ)λ. (Ⅱ)$P\{Z=0\}=e^{-\lambda}$;$P\{Z=n\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{|n|}}{2\cdot|n|!}$,$n=\pm1,\pm2,\cdots$.

(23)(Ⅰ)$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$. (Ⅱ)$E\hat{\sigma}=\sigma$,$D\hat{\sigma}=\dfrac{\sigma^2}{n}$.